

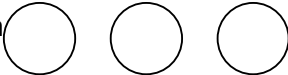
## 1. Muutamia erityisongelmia murtolukujen käsitteen oppimisessa

(Lähde: Lamon, S. 1999. Teaching fractions and ratios for understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Publishers.)

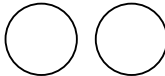
Murtolukujen alueelle siirryttäessä otetaan "kvanttihyppy" huomattavasti teoreettisempaan matematiikkaan kuin kokonaisluvuilla laskettaessa. Äkkiä symbolien merkitykset, nimitykset, laskutoimitukset ovatkin aivan erilaisia kuin mihin aikaisemmin on totuttu.

### 1.1 Kysymys kokonaisesta

Aikaisemmin on totuttu siihen, että kokonainen aina viittaa yhteen objektiin, sitä voidaan kuvata esimerkiksi erilaisten esineiden avulla. Murtolukujen kohdalla kysymys kokonaisesta muuttuu teoreettisemmaksi, esimerkiksi:

a) Jos kolmen joukko on kokonain 

Silloin  $1/3$  tästä joukosta onkin yksi pallo ja puolet samasta joukosta onkin yksi ja puoli palloa

b) Ja jos ajatellaan, että kaksi on kokonainen 

Silloin kolmasosa tästä joukosta onkin  $4/6$  ja puolet on yksi pallo

c) Sekin mikä näyttää samalta, voidaan esittää monella eri tavalla:

Jos tämä on  
yksi kokonainen



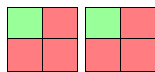
Kolme neljäsosaa  
on näin paljon



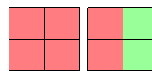
Jos tämä on  
yksi kokonainen



Kolme neljäsosaa  
on näin paljon



Tai näin paljon:



d) Ja edelleen jos yksi on kokonainen  
mutta myös  $2/4$ ,  $3/6$ ,  $9/18$  jne.



silloin puolikas on puoli palloa,

## 1.2 Yksiköiden moninaisuus

Murtolukuja voi myös käsitellä monien erilaisten yksiköiden avulla:

a) Kolme kappaletta yhden yksiköitä, tai yksi kappale kolmen yksiköitä



b) Neljä kappaletta yhden yksiköitä tai yksi kappale neljän yksiköitä



Esimerkiksi neljä kappaletta yhden yksiköitä on ihan eri asia kuin yksi neljän kappaleen yksikkö. Lapsille se tuottaa vaikeuksia. Tulee siis ihan erinäköinen tulos jos otetaan  $\frac{1}{4}$  neljän suklaapatukan yksiköstä tai  $\frac{1}{4}$  neljään ruutuun jaetusta suklaalevystä.

## 1.3 Uudenlaisia laskutoimituksia

Kokonaisluvuilla laskettaessa lapset ovat enimmäkseen laskeneet yhteen, vähennys ja kertolaskuja. Ennen murtolukujen käyttöön ottoa lasten tietämys kerto- ja jakolaskuoperaatioista on hyvin rajallinen. Kokonaisluvuilla laskettaessa suuruuksia nimitetään yksinkertaisesti: 5 karamellia, 4 jalkaa. Toisin kuin silloin kun operoidaan murtoluvuilla, tulokseksi tulee suhde. Esimerkiksi jos jokaiseen pussiin laitetaan 6 karamellia – tulos on 6 karamellia/pussi – ei siis 6 karamellia eikä 6 pussia.

Kokonaisluvut voidaan esittää helposti kuvilla ja esineiden avulla, mutta esimerkiksi suhteena esitettävää suuretta, kuten nopeutta 60km/h ei ole kovin helppo kuvata. Kun siis puhutaan nopeudesta luokassa, siinä on ikään kuin kätkeytyneenä kahden suureen: matkan ja ajan, suhde eikä yksi ainoa suure. Kokonaisluvuilla laskettaessa kertolaskut voidaan opettaa toistettuna yhteenlaskuna, se ei enää onnistu rationaaliluvuilla, esimerkiksi: Jos autolla ajetaan 70 km/h ja matkaan kuluu puoli tuntia. Miten pitkä matka kuljettiin? Vastauksena tulee 35 km.

Edelleen, niin kauan kuin liikutaan kokonaisluvuissa, voidaan sanoa että  $3 \times 4$  on sama kuin  $4 \times 3$ , murtoluvuilla kommutatiivisuus voi olla monimutkaisempaa, esimerkiksi: Jos ajetaan 3 tuntia 50 km tuntinopeudella, on hyvin erilainen matka kuin jos ajetaan 50 tuntia 3 km tuntinopeudella.

## 1.4 Ongelmia terminologiasta

Matemaattiset nimitykset ovat tarkkoja ja huolimaton käyttö sekoittaa käsitteet. Rationaaliluvulla tarkoitetaan murtolukua, jonka **osoittaja ja nimittäjä ovat kokonaislukuja**. Irrationaaliluvulla taas tarkoitetaan niitä lukuja, jotka eivät ole esitettävissä kahden kokonaisluvun suhteena. Kaikki murtoluvun muodossa esitettävät luvut eivät siis kuitenkaan ole rationaalilukuja, esimerkiksi luvut  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2/5}$  eivät ole rationaalilukuja vaan irrationaalilukuja.

## 1.5 Murtoluvut esittämässä osaa kokonaisesta

Joskus murtoluvun nimitystä käytetään pelkästään kuvaamassa perinteistä osaa kokonaisesta. Mallit esitetään lapsille esimerkiksi pizza, ym piirakkamalleilla, mikä jättää esimerkiksi mielikuvan, että ykkönen on suurin murtoluku. Tämä virheellinen mielikuva on lapsilla hyvin yleinen. Murtoluvulla voidaan siis esittää myös ykköstä suurempia suhteita, kuten  $\frac{8}{7}$ , 120 % jne.

## 1.6 Lukujen tulkinta

Kokonaislukuja käytetään tavallisesti vastaamaan kysymykseen ”kuinka monta?” Rationaali- ja murtoluvuilla voidaan kyllä vastata samaan kysymykseenkin, esimerkiksi kuinka monta puolikasta kullekin riittää. Tavallisempaa on kuitenkin vastata kysymykseen lukujen suhteesta toisiinsa. Lisäksi rationaaliluvut voidaan kirjoittaa desimaalimuodossa, mutta kaikki desimaalimuodossa olevat luvut eivät ole rationaalilukuja. Rationaalilukuja ovat vain päättyvät tai päättymättömät ja jaksolliset murtoluvut:

Esimerkiksi Luvut 0,2 0,33 0,999..., 0,613613... ovat rationaalilukuja, mutta luvut 0,21345... 0,20100101... 3,1457... eivät ole, vaan ne ovat irrationaalilukuja.

### MITÄ KAIKKEA LUKU $\frac{3}{4}$ VOI TARKOITTAA?

- ✓ Jussi sanoi ryhtyvänsä tekemään läksyjään kolmen neljännestunnin kuluttua.
- ✓ Marjalla oli kolme suklaapatukkaa, joissa kussakin oli neljä palaa. Hän antoi ystävälleen jokaisesta patukasta yhden palan. Tai hänellä oli yksi suklaapatukka, jossa oli neljä palaa ja hän söi siitä kolme palaa.
- ✓ Koululuokassa oli 24 oppilasta, näistä 18 oli tyttöjä. Tällöin tyttöjen osuus oli  $\frac{3}{4}$  tai 75 % luokasta.
- ✓ Kokouksessa oli 12 miestä ja  $\frac{3}{4}$  niin monta naista. (Tällöin naisia oli 9.)
- ✓ Lukusuoralta löytyy vastinpiste jokaiselle rationaaliluvulle, niinpä luvulle  $\frac{3}{4}$  löytyy vastinpiste, mutta jokainen lukusuoran piste ei ole rationaaliluvun vastinpiste. (Koulussa käytettävä lukusuora on tavallisesti ns. reaalityökalun lukusuora, jolla on myös irrationaalilukuja.)
- ✓ Kirjakaupassa oli alennusmyynti, jossa kirjoja myytiin 75 % alennuksella.
- ✓ Laatikossa oli 9 sinistä sukkaa ja 3 punaista. Millaisella todennäköisyydellä laatikosta saa ensimmäisellä kerralla sinisen sukan? Todennäköisyys on  $\frac{3}{12}$  eli  $\frac{1}{4}$ .

## 2.1. Desimaalilukujen laskutoimitukset

Yhteenlaskussa: pilkut kohdakkain, kertolaskussa pienimmät osat kohdakkain, tulossa on yhtä monta desimaalia kuin tulon tekijöissä on yhteensä.

Esimerkki 1. Laske yhteen 3 euroa 20 senttiä ja 1 euro 5 senttiä  
 $3,20 + 1,05 = 4,25 = 4\text{€ ja } 25 \text{ snt.}$

Mikä tahansa rationaaliluku voidaan esittää murto- ja desimaalimuodossa, mutta kaikkia desimaalilukuja ei voida esittää murtolukuina esim.  $\pi$ , joka on irrationaaliluku, siis ei rationaaliluku!

Jakolaskussa lavennetaan luku siten, että jakaja on kokonainen.

Esimerkki:

a) Kerro (allekkain) kahdellakymmenellä viidellä sadasosalla luku 15 482 esitä tulos kahden desimaalin tarkkuudella.

Muutetaan ensin numeeriseen muotoon, saadaan tehtäväksi  $0,25 \cdot 15482$

$$\begin{array}{r} 15482 \\ \underline{\quad 0,25} \\ 77410 \\ \underline{\quad 30964} \\ 3870,50 \end{array}$$

Vastaus 3870,50, voidaan myös sanoa, että 25 % luvusta 15 482 on 3870,50

b) Laske allekkain jakamisen menetelmällä  $32146 : 32,4$  esitä tulos kahden desimaalin tarkkuudella

$32146 : 32,4$  Lavennetaan ensin kymmenellä, jolloin saadaan desimaalit pois jakajasta.

Saadaan  $321460 : 324$

$$\begin{array}{r} 321460, : 324 = 99,197 = 99,20 \\ \underline{2916} \\ 2980 \\ \underline{2916} \\ 640 \\ \underline{324} \\ 3160 \\ \underline{2916} \\ 2440 \\ \underline{2268} \\ 172 \end{array}$$

## **2.2. Lukujen pyöristyssäännöt:**

Desimaalilukujen summa pitää esittää yhtä monen desimaalin tarkkuudella kuin on epätarkimmassa lähtöarvossa.

Kertolaskun lopputulokseen on syytä ottaa vain yhtä monta merkitsevää numeroa kuin on epätarkimmassa lähtöarvossa. Jakolaskun tuloksen tarkkuudelle pätee sama tarkkuussääntö, kuin kertolaskullekin.

Merkitseviksi numeroiksi ei lasketa desimaaliluvun alussa eikä kokonaisluvun lopussa olevia nollia. Kokonaisluvun loppunollatkin voivat olla merkitseviä numeroita; asiayhteydestä saattaa saada viitteitä.

HUOM! Oppimisvaikeuksissa oleville oppilaille kannattaa ”pyöristämisestä” puhua myös sanoilla ”melkein”, ”suunnilleen”.

### **2.3. Murto- ja desimaalilukujen opettamisesta**

Voimassa olevan opetussuunnitelman mukaan murtolukujen opettaminen aloitetaan jo alkuopetuksen aikana luokilla 1-2, jolloin on tarkoitus opettaa ihan perusmurtoluvut puolikas, kolmasosa ja neljäsosa konkreettisten mallien avulla.

Kun jatkossa siirrytään opettamaan murto- ja desimaalilukuja, pitää lukujen tunnistamiseen, kuvaamiseen jne. varata paljon aikaa. Eli, ei kannata rynnätä liian nopeasti laskemaan, vaan pelkästään tutkitaan näitä lukuja, opetellaan niiden järjestystä ja symbolimuotoja.

Murto- ja desimaalimuodossa olevien lukujen kohdalla kysymys siitä, **mikä on kokonainen**, on olennaisen tärkeä, ja sitä pitää ihmetellä paljon opetuksessa. Tämä johtuu, siitä että kokonainen ei enää ole itsestään selvä. Esimerkiksi yksi kolmasosa mukista ja yksi kolmasosa maapallosta ovat molemmat kolmasosia, mutta todella eri kokoisia.

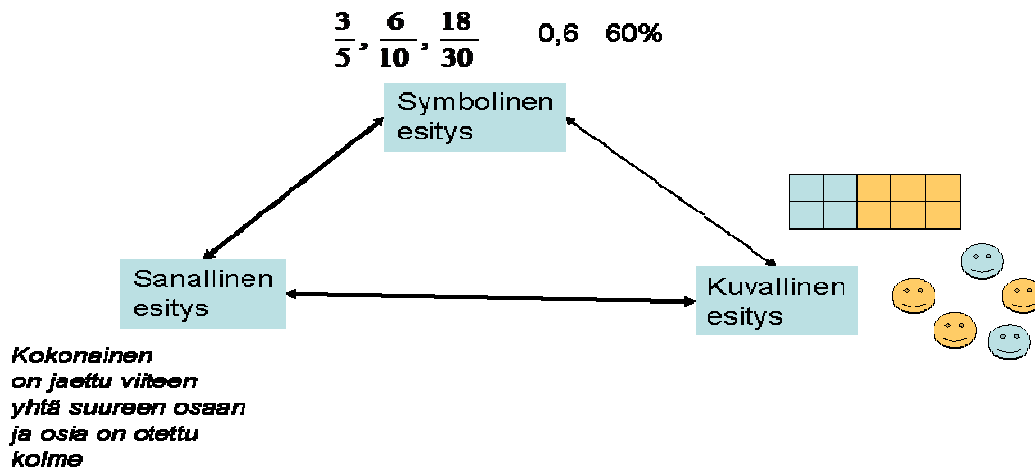
Murtolukumuoto tarkoittaa, että KOKONAINEN JAETAAN YHTÄ SUURIIN OSIIN JA OSIA OTETAAN OSOITTAJAN OSOITTAMA MÄÄRÄ.

Neljä viidesosaa tarkoittaa, että kokonainen on jaettu viiteen yhtä suureen osaan ja osia on otettu neljä kappaletta.

$\frac{3}{4}$  tarkoittaa, että kokonainen on jaettu neljään **yhtä suureen** osaan ja osia on otettu kolme

15 % tarkoittaa, että kokonainen on jaettu sataan **yhtä suureen** osaan ja osia on otettu viisitoista

On tärkeää, että harjaannutetaan esim. tunnistamisen tason tehtävien kautta tunnistamaan saman luvun eri esitysmuotoja: sanallisesta kuvalliseen, kuvallisesta symbolimuotoon, symbolimuodosta toisenlaiseen symbolimuotoon jne.



## 2.4 Rationaalilukujen suuruusjärjestys

Murtolukumuodossa olevien lukujen suuruusjärjestys tutkitaan laventamalla luvut samannimisiksi ja tutkimalla osoittajia tai muuttamalla jakolaskulla desimaalimuotoon ja palauttamalla kymmenjärjestelmään.

## 2.5 Rationaalilukujen laskutoimitukset

Murtolukuja käytettäessä yhteen ja vähennyslasku "palautetaan luonnollisten lukujen järjestelmään" laventamalla samannimisiksi. Opettaessa voidaan käyttää myös sanontaa: ETSITÄÄN YHTEINEN MITTA

Yhteen ja vähennyslaskut:

Luvut muutetaan samannimisiksi laventamalla, lasketaan osoittajat yhteen, tai vähennetään toisistaan.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$$



yhteensä 19 kahdeskymmenesosaa

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

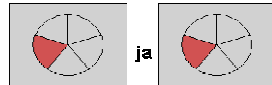


puolikkaasta jää yksi kuudesosa

**Murtolukujen kertolaskussa** osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään:

Esim. Kun yksi viidesosa kerrotaan kahdella, saadaan kaksi viidesosaa

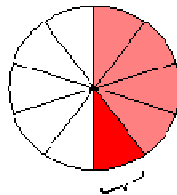
$$\frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{5}$$



Kun kertoja on murtoluku, kertolasku muistuttaa osan ottamista luvusta:

Esim. Kun yhdellä viidesosalla kerrotaan puolikas, se tarkoittaa, että otetaan viidesosa puolikkaasta, eli yksi kymmenesosa kokonaisesta.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$



Jos murtoluku on kertojana, se tarkoittaa että kerrottavasta otetaan vain osa. Sillä jos otat kaksi kertaa, saat kaksinkertaisen. Jos kolme kertaa, niin saat kolminkertaisen. Jos otat vain puoli kertaa, saat vain puolet.

**HUOMAA, ETTÄ KERTOJAA EI ESITETÄ KUVAN AVULLA!**

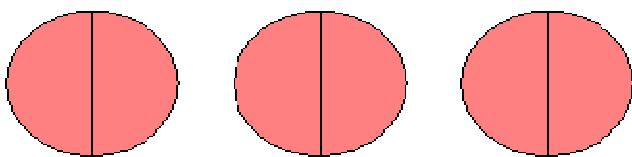
**Murtolukujen jakolaskussa** jakajaa ei esitetä kuvan avulla, esim.

$\frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}$ , eli kun kolme viidesosaa jaetaan kolmelle, jokainen saa yhden viidesosan.

Mutta jos jakaja on murtoluku, voidaan useimmiten käyttää ns. sisältöjakoja. esim. kuinka monta kertaa puolikas sisältyy kolmeen kokonaiseen.

$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Siis puolikas sisältyy kolmeen kokonaiseen kuusi kertaa.



**ELI:**

**Murtolukujen laskusääntöjä opettaessa kannattaa käyttää kuvaa oppilaiden avuksi. Mutta kuva sopii parhaiten yhteen- ja vähennyslaskun malliksi.**

**Myös kerto- ja jakolaskussa voi käyttää kuvaa, mutta silloin kertoja ja jakaja pitää olla numeromuodossa ja kannattaa selittää kuten edellä.**

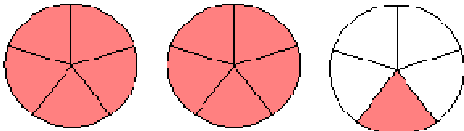
### 13.3 Sekaluvun muuttaminen murtoluvuksi

Sekaluku koostuu kokonaisosasta ja murtolukuosasta. Jostakin on siis sekä kokonaisia että murto-osia. Esimerkiksi kolme ja puoli omenaa, viisi ja yksi kuudesosa pitsaa.

Oppikirjoissa muunnos esitetään kaavalla, että kokonaisosa kerrotaan murto-osan nimittäjällä, siihen lisätään osoittaja, ja tämän laskun tulos tulee osoittajaksi. Alkuperäinen nimittäjä säilyy nimittäjänä.

Täten 
$$2\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5}$$

Toimitus tulee oppilaalle ymmärrettävämmäksi, jos se selitetään vaikka seuraavasti: Olemme muuttamassa kaksi kokonaista ja yhden viidesosan viidesosiksi. Katsotaan ensin kuinka monta viidesosaa on kahdessa kokonaisessa:



Kummassakin on viisi viidesosaa, joten yhteensä viidesosia on kymmenen. Sen lisäksi meillä on vielä yksi viidesosa, joten viidesosia on yhteensä yksitoista.

Tilannetta voi myös havainnollistaa aidoilla malleilla, kuten esimerkiksi omenoilla jne.